

*Н. К. Кривулин, В. А. Агеев, И. В. Гладких***ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТРОПИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ
ДЛЯ ОЦЕНКИ АЛЬТЕРНАТИВ НА ОСНОВЕ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ***

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Рассматривается решение задачи оценки альтернатив на основе парных сравнений при помощи методов тропической оптимизации. Задача нахождения вектора рейтингов альтернатив сводится к аппроксимации матриц парных сравнений согласованными матрицами в смысле лог-чебышевской метрики. Затем задача аппроксимации формулируется и решается в терминах тропической математики. Полученные в результате решения записываются в компактной векторной форме, удобной для дальнейшего анализа и практических расчетов. В случае, когда решение оказывается не единственным (с точностью до положительного множителя), предлагается характеризовать все множество решений при помощи двух решений, которые являются в некотором смысле наихудшим и наилучшим решениями. В качестве наилучшего решения выбирается вектор, который максимально различает альтернативы с наибольшим и наименьшим рейтингами, а наихудшего — вектор, минимально различающий такие альтернативы. Показано, как указанные векторы могут быть найдены с помощью методов тропической оптимизации. Для иллюстрации полученных результатов приводятся примеры решения задач оценки рейтингов альтернатив. Библиогр. 23 назв.

Ключевые слова: тропическая математика, идемпотентное полуполе, тропическая оптимизация, матрица парных сравнений, согласованная матрица, лог-чебышевская метрика, аппроксимация матриц.

*N. K. Krivulin, V. A. Ageev, I. V. Gladkikh***APPLICATION OF METHODS OF TROPICAL OPTIMIZATION
FOR EVALUATING ALTERNATIVES BASED
ON PAIRWISE COMPARISONS**

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab.,
St. Petersburg, 199034, Russian Federation

Solution to the problem of evaluating alternatives based on pairwise comparisons is considered, using methods of tropical optimization. The problem of deriving the vector of scores for alternatives reduces to the approximation of pairwise comparison matrices by consistent matrices in the sense of the log-Chebyshev metric. Then the approximation problem is formulated and solved in terms of tropical mathematics. The results obtained are represented in compact vector form, ready for further analysis and practical computations. In the case when the solution is non-unique (up to a positive factor), it is suggested that the set of solutions be characterized via two solutions that are, in some sense, the best and worst solutions. As the best

Кривулин Николай Кимович — доктор физико-математических наук, профессор; nkk@math.spbu.ru

Агеев Владимир Анатольевич — студент; vladimir.ageev@me.com

Гладких Игорь Валентинович — кандидат экономических наук, доцент; gladkikh@gsom.pu.ru

Krivulin Nikolai Kimovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor; nkk@math.spbu.ru

Ageev Vladimir Anatolyevich — student; vladimir.ageev@me.com

Gladkikh Igor Valentinovich — PhD of economical sciences, associate professor; gladkikh@gsom.pu.ru

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (проект № 16-02-00059).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2017

solution, the vector is taken which best differentiates between the alternatives with the highest and lowest scores, and as the worst, the vector which worth differentiates these alternatives. It is shown that these vectors can be obtained using methods of tropical optimization. To illustrate the results obtained, solution examples for problems of evaluating the scores of alternatives are given. Refs 23.

Keywords: tropical mathematics, idempotent semifield, tropical optimization, pairwise comparison matrix, consistent matrix, log-Chebyshev metric, matrix approximation.

1. Введение. Задачи оценки и ранжирования альтернатив возникают в таких областях как маркетинг (изучение предпочтений потребителей), социология (анализ социологических опросов), политология (прогноз результатов выборов) и др. Существуют различные методы оценки, основанные на одновременном сравнении нескольких альтернатив: метод рейтинговой оценки, метод отношения, метод распределения суммы и т. д. [1]. Широко применяется также подход, который опирается на одновременное сравнение только двух альтернатив, известный как метод парных сравнений [2–5].

В методе парных сравнений в процессе изучения альтернатив на каждом шаге сопоставляются только два объекта (характеристики объектов), что обычно более просто, чем одновременная оценка нескольких объектов. Результат такой процедуры — матрица парных сравнений, анализ которой позволяет определить степень предпочтения (рейтинг, приоритет) каждой альтернативы в отдельности.

Заметим, что в матрицах парных сравнений, полученных после указанной процедуры, обычно нарушена транзитивность оценок. Отсюда возникает задача аппроксимации таких матриц согласованными матрицами, т. е. матрицами, элементы которых обладают свойством транзитивности.

Наиболее распространенным методом решения задачи нахождения рейтингов альтернатив по матрицам парных сравнений является метод главного собственного вектора (см., например, [3]). Кроме того, возможно решение с помощью аппроксимации матриц парных сравнений согласованными матрицами в метрике Чебышева или евклидовой. Эти методы приводят в общем случае к алгоритмическим решениям (степенной алгоритм, симплекс-метод, метод Ньютона и др.) [4–9].

Новый подход к решению задачи оценки рейтингов альтернатив, который использует методы тропической математики, рассматривался в работах [10–12]. Тропическая (идемпотентная) математика — быстро развивающаяся область прикладной математики, связанная с изучением теории и разработкой приложений полуколец с идемпотентным сложением [13–16]. Задачи оптимизации, которые могут быть сформулированы и решены в терминах таких полуколец (задачи тропической оптимизации), образуют важное направление исследований в этой области, ориентированное на разработку эффективных методов решения как для известных, так и для новых оптимизационных задач.

В настоящей работе развиваются методы решения задачи оценки рейтингов альтернатив при помощи тропической оптимизации, предложенные в [17–20]. Применяется подход, который рассматривает решение задачи как аппроксимацию матриц в логчебышевской метрике. Он позволяет получить полное решение в явном виде, которое записывается в компактной векторной форме, удобной для дальнейшего анализа и численных расчетов. В работе описана задача исследования решений, возникающая в случае, когда вектор рейтингов альтернатив определен неоднозначно. В этом случае, чтобы охарактеризовать все множество решений, предлагается выбирать векторы, которые минимально и максимально различают альтернативы с минимальным

и максимальным рейтингами. Для нахождения таких векторов применяются общие методы решения задач тропической оптимизации, разработанные в [21–23].

Статья имеет следующую структуру. В п. 2 даны формулировки задач оценки рейтингов альтернатив на основе парных сравнений и анализа полученных решений. В п. 3 приведены необходимые обозначения и термины тропической математики. В п. 4 представлены примеры задач тропической оптимизации и описаны методы их решения. Применению методов тропической оптимизации для решения задачи нахождения вектора рейтингов альтернатив на основе матрицы парных сравнений посвящен п. 5. Постановка на языке тропической математики задачи анализа решений в случае, когда вектор рейтингов определен неоднозначно, описана в п. 6, где также содержатся необходимые для решения этой задачи результаты и рассмотрены примеры.

2. Задача оценки рейтингов альтернатив на основе парных сравнений.

Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ — матрица, полученная в результате применения процедуры парных сравнений альтернатив (например, с помощью опроса респондентов).

Обычно используется мультипликативная шкала, при которой элемент a_{ij} матрицы \mathbf{A} показывает во сколько раз альтернатива i превосходит альтернативу j . Элементы матрицы удовлетворяют естественному условию $a_{ij} = 1/a_{ji} > 0$, откуда следует, что матрица имеет обратно симметрическую форму.

Матрица парных сравнений \mathbf{A} называется согласованной, если ее элементы обладают свойством транзитивности: $a_{ik} = a_{ij}a_{jk}$ для всех i, j и k (см., например, [4]).

Элементы согласованной матрицы \mathbf{A} могут быть представлены в виде $a_{ij} = x_i/x_j$, где $x_i > 0$ при всех i . Таким образом, любая согласованная матрица \mathbf{A} однозначно порождается некоторым положительным вектором $\mathbf{x} = (x_i)$. Элементы вектора \mathbf{x} определяют (с точностью до положительного множителя) индивидуальные рейтинги сравниваемых альтернатив, а потому его нахождение приводит к решению задачи анализа результатов парных сравнений.

Полученная матрица парных сравнений обычно не является согласованной, в частности, из-за ошибок в обработке результатов опросов или как следствие выбора респондента, который нарушает свойство транзитивности. Возникает задача аппроксимации несогласованной матрицы парных сравнений $\mathbf{A} = (a_{ij})$ согласованной матрицей $\mathbf{X} = (x_{ij})$, на которой достигается минимум некоторой функции невязки (ошибки) φ :

$$\min_{\mathbf{X}} \varphi(\mathbf{A}, \mathbf{X}). \quad (1)$$

Заметим, что задача (1) может быть представлена как задача нахождения по заданной матрице \mathbf{A} вектора \mathbf{x} , который определяет аппроксимирующую матрицу \mathbf{X} .

Учитывая, что элементы матриц \mathbf{A} и \mathbf{X} положительны, в качестве функции ошибки можно взять лог-чебышевскую метрику с основанием логарифма, бóльшим единицы:

$$\rho(\mathbf{A}, \mathbf{X}) = \max_{i,j} |\log a_{ij} - \log x_{ij}|.$$

После элементарных преобразований, используя монотонность логарифма, получим

$$\rho(\mathbf{A}, \mathbf{X}) = \max_{i,j} \max\{\log a_{ij}/x_{ij}, \log x_{ij}/a_{ij}\} = \log \max_{i,j} \max\{a_{ij}/x_{ij}, x_{ij}/a_{ij}\}.$$

В силу того, что элементы матрицы парных сравнений \mathbf{A} удовлетворяют равенству $a_{ij} = 1/a_{ji}$, а элементы согласованной матрицы \mathbf{X} определяются соотношением

$x_{ij} = x_i/x_j$, выражение под знаком логарифма можно представить в следующей форме: $\max_{i,j} \max\{a_{ij}/x_{ij}, x_{ij}/a_{ij}\} = \max_{i,j} \max\{a_{ij}x_j/x_i, x_i/a_{ij}x_j\} = \max_{i,j} a_{ij}x_j/x_i$. Наконец, монотонность логарифма позволяет свести задачу минимизации всей функции к минимизации ее аргумента. Теперь задачу (1) можно сформулировать как задачу нахождения такого вектора $\mathbf{x} = (x_i)$, при котором достигается

$$\min_{\mathbf{x}} \max_{i,j} a_{ij}x_j/x_i. \quad (2)$$

Предположим, что для матрицы парных сравнений \mathbf{A} найден не единственный (с точностью до положительного множителя) вектор рейтингов альтернатив \mathbf{x} , а множество различных векторов \mathcal{S} . Чтобы его охарактеризовать, получим в таком множестве векторы, которые являются в некотором смысле наилучшим и наихудшим решениями задачи оценки рейтингов альтернатив. В качестве наилучшего решения может выступать, например, вектор, который максимально различает (дифференцирует) альтернативы с наибольшим и наименьшим рейтингами, а как наихудший — вектор, минимально различающий эти альтернативы.

Определить наихудший и наилучший дифференцирующий векторы рейтингов можно путем минимизации и максимизации максимального отношения между компонентами вектора $\mathbf{x} = (x_i)$, которое записывается в виде

$$\max_i x_i / \min_i x_i = \max_i x_i \times \max_i x_i^{-1}. \quad (3)$$

Задачи нахождения на множестве \mathcal{S} наихудшего и наилучшего решений в указанном выше смысле принимают вид

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}} \max_i x_i \times \max_i x_i^{-1}, \quad (4)$$

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}} \max_i x_i \times \max_i x_i^{-1}. \quad (5)$$

Ниже задачи (2), (4) и (5) формулируются в терминах тропической математики, а затем решаются с помощью методов тропической оптимизации.

3. Элементы тропической математики. Приведем краткий обзор основных определений и обозначений тропической математики, необходимых для последующего описания задач тропической оптимизации и их решений. Подробное изложение различных аспектов теории и приложений тропической математики можно найти, например, в работах [13–16].

Рассмотрим непустое множество \mathbb{X} , которое замкнуто относительно ассоциативных и коммутативных операций сложения \oplus и умножения \otimes , содержит нуль 0 и единицу 1 , которые являются нейтральными элементами по сложению и умножению соответственно. Сложение обладает свойством идемпотентности, согласно которому $x \oplus x = x$ для любого $x \in \mathbb{X}$. Выполняется свойство дистрибутивности умножения относительно сложения. Для любого $x \neq 0$ существует обратный элемент x^{-1} такой, что $x^{-1} \otimes x = 1$. Алгебраическая система $(\mathbb{X}, \oplus, \otimes, 0, 1)$ с указанными свойствами называется идемпотентным полуполем. Дополнительно предполагается, что это полуполе является линейно упорядоченным, а также алгебраически полным, т. е. разрешимо уравнение $x^n = a$ для любых $a \in \mathbb{X}$ и натурального n . Для любых $x, y \in \mathbb{X}$ и рационального $\alpha \geq 0$ выполняется тождество $(x \oplus y)^\alpha = x^\alpha \oplus y^\alpha$.

Для решения рассматриваемых задач будем использовать вещественное полуполе $\mathbb{R}_{\max, \times} = (\mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \max, \times, 0, 1)$, где $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, которое в литературе обычно

называют \max -алгеброй. Для него $\mathbb{X} = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, операция \oplus задана как максимум, а операция \otimes — как арифметическое умножение. Нейтральные элементы определены как обычно: $0 = 0$, а $1 = 1$.

Далее при записи выражений знак операции умножения \otimes для простоты опускается.

Матрицы размерности $m \times n$ над \mathbb{X} образуют множество $\mathbb{X}^{m \times n}$. Матричные операции соответствуют обычным, где скалярные операции сложения и умножения заменяются на операции \oplus и \otimes .

Любой ненулевой матрице $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{X}^{m \times n}$ отвечает мультипликативно сопряженная матрица $\mathbf{A}^- = (a_{ij}^-) \in \mathbb{X}^{n \times m}$, в которой $a_{ij}^- = a_{ji}^{-1}$, если $a_{ji} \neq 0$, иначе $a_{ij}^- = 0$.

Для любой квадратной матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{X}^{n \times n}$ ее след вычисляется по формуле

$$\text{tr } \mathbf{A} = a_{11} \oplus a_{22} \oplus \cdots \oplus a_{nn} = \bigoplus_{i=1}^n a_{ii}.$$

Целая неотрицательная степень n матрицы \mathbf{A} определяется обычным путем: $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$, $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}\mathbf{A}^{n-1}$, где \mathbf{I} — единичная матрица, n — натуральное число.

Спектральным радиусом матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{X}^{n \times n}$ называется скаляр, который находится следующим образом:

$$\lambda = \text{tr } \mathbf{A} \oplus \text{tr}^{1/2}(\mathbf{A}^2) \oplus \cdots \oplus \text{tr}^{1/n}(\mathbf{A}^n) = \bigoplus_{k=1}^n \text{tr}^{1/k}(\mathbf{A}^k).$$

Для любой матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{X}^{n \times n}$ определена матрица

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{I} \oplus \mathbf{A} \oplus \cdots \oplus \mathbf{A}^{n-1} = \bigoplus_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^k.$$

Матрица \mathbf{A} без нулевых элементов является обратно симметрической, если $\mathbf{A}^- = \mathbf{A}$.

Векторы-столбцы над \mathbb{X} порядка n образуют множество \mathbb{X}^n . Векторы, все элементы которых равны 0 или 1 , обозначаются как $\mathbf{0}$ или $\mathbf{1}$. Векторные операции выполняются по обычным правилам с заменой арифметического сложения и умножения на \oplus и \otimes .

Любому ненулевому вектору-столбцу $\mathbf{x} = (x_i) \in \mathbb{X}^n$ соответствует вектор-строка $\mathbf{x}^- = (x_i^-)$, где $x_i^- = x_i^{-1}$, если $x_i \neq 0$, иначе $x_i^- = 0$.

Вектор называется регулярным, если он не содержит нулевых элементов.

Вектор $\mathbf{b} \in \mathbb{X}^m$ линейно зависит от векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{X}^m$, если его можно представить в виде линейной комбинации $\mathbf{b} = x_1 \mathbf{a}_1 \oplus \cdots \oplus x_n \mathbf{a}_n$ с коэффициентами $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{X}$. Векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} являются коллинеарными, если $\mathbf{b} = x\mathbf{a}$, где $x \in \mathbb{X}$.

4. Задачи тропической оптимизации. Приведем примеры задач тропической оптимизации и их решений, которые будут использованы для оценки рейтингов альтернатив на основе парных сравнений.

Пусть $\mathbf{A} \in \mathbb{X}^{n \times n}$ — некоторая матрица. Рассмотрим задачу нахождения регулярных векторов $\mathbf{x} \in \mathbb{X}^n$, на которых достигается

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^- \mathbf{A} \mathbf{x}. \quad (6)$$

Справедливо следующее утверждение [21], которое дает полное решение задачи.

Теорема 1. Пусть \mathbf{A} — матрица, которая имеет спектральный радиус $\lambda > 0$, и пусть $\mathbf{A}_\lambda = \lambda^{-1}\mathbf{A}$. Тогда минимум в задаче (6) равен λ , а общее решение имеет вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}_\lambda^* \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} > \mathbf{0}.$$

Рассмотрим задачу минимизации и ее решение, предложенное в [22]. Предположим, что заданы матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{X}^{m \times n}$ и векторы $\mathbf{p} \in \mathbb{X}^m$ и $\mathbf{q} \in \mathbb{X}^n$. Необходимо найти такие регулярные векторы $\mathbf{x} \in \mathbb{X}^n$, которые дают минимум в задаче

$$\min_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{q}^- \mathbf{x} (\mathbf{A} \mathbf{x})^- \mathbf{p}. \quad (7)$$

Введем и исследуем процедуру разреживания матрицы задачи.

Лемма 1. Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ — матрица без нулевых строк, $\mathbf{p} = (p_i)$ — ненулевой вектор, $\mathbf{q} = (q_j)$ — регулярный вектор и пусть $\Delta = (\mathbf{A} \mathbf{q})^- \mathbf{p}$. Определим разреженную матрицу $\hat{\mathbf{A}} = (\hat{a}_{ij})$ с элементами

$$\hat{a}_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{если } a_{ij} \geq \Delta^{-1} p_i q_j^{-1}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда замена \mathbf{A} на $\hat{\mathbf{A}}$ в условии задачи (7) не изменит как множество ее решений, так и минимум, который на нем достигается.

Полное решение задачи (7) предоставляет

Теорема 2. Пусть \mathbf{A} — разреженная матрица без нулевых строк для задачи (7), \mathbf{p} — ненулевой вектор, а \mathbf{q} — регулярный вектор.

Обозначим через \mathcal{A} множество матриц, полученных из \mathbf{A} фиксацией одного ненулевого элемента в каждой строке с обращением всех остальных элементов в 0.

Тогда минимум в задаче (7) равен $\Delta = (\mathbf{A} \mathbf{q})^- \mathbf{p}$, а все регулярные решения имеют вид

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} \oplus \Delta^{-1} \mathbf{A}_1^- \mathbf{p} \mathbf{q}^-) \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}_1 \in \mathcal{A}.$$

В заключение рассмотрим задачу нахождения максимума целевой функции предыдущей задачи: для заданной матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{X}^{m \times n}$ и векторов $\mathbf{p} \in \mathbb{X}^m$ и $\mathbf{q} \in \mathbb{X}^n$ необходимо найти регулярные векторы $\mathbf{x} \in \mathbb{X}^n$, которые обеспечивают

$$\max_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{q}^- \mathbf{x} (\mathbf{A} \mathbf{x})^- \mathbf{p}. \quad (8)$$

Следующий результат, полученный в [23], обеспечивает полное решение задачи.

Теорема 3. Пусть $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_j)$ является матрицей, столбцы которой $\mathbf{a}_j = (a_{ij})$ регулярны, а $\mathbf{p} = (p_i)$ и $\mathbf{q} = (q_i)$ — регулярные векторы.

Тогда максимум в задаче (8) равен $\Delta = \mathbf{q}^- \mathbf{A}^- \mathbf{p}$ и достигается тогда и только тогда, когда компоненты вектора $\mathbf{x} = (x_i)$ удовлетворяют условиям

$$x_k = \alpha \mathbf{a}_k^- \mathbf{p}, \quad x_j \leq \alpha a_{sj}^{-1} p_s, \quad j \neq k,$$

для всех $\alpha > 0$ и индексов k и s , которые определяются соотношениями

$$k = \arg \max_j q_j^{-1} \mathbf{a}_j^- \mathbf{p}, \quad s = \arg \max_i a_{ik}^{-1} p_i.$$

Запишем полученное решение в векторной форме, используя лемму из [22].

Лемма 2. Пусть \mathbf{g} — вектор, а \mathbf{h} — регулярный вектор такие, что $\mathbf{g} \leq \mathbf{h}$. Тогда эквивалентны утверждения:

1. Вектор \mathbf{x} удовлетворяет неравенству

$$\alpha \mathbf{g} \leq \mathbf{x} \leq \alpha \mathbf{h}, \quad \alpha > 0.$$

2. Вектор \mathbf{x} удовлетворяет равенству

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} \oplus \mathbf{gh}^-) \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} > 0.$$

Утверждение теоремы 3 теперь можно записать в таком виде:

Теорема 4. Пусть $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_j)$ является матрицей, столбцы которой $\mathbf{a}_j = (a_{ij})$ регулярны, а $\mathbf{p} = (p_i)$ и $\mathbf{q} = (q_i)$ — регулярные векторы.

Обозначим через \mathbf{A}_{sk} матрицу, полученную из матрицы \mathbf{A} фиксацией элемента a_{sk} и обращением всех остальных элементов в 0.

Тогда максимум в задаче (8) равен $\Delta = \mathbf{q}^- \mathbf{A}^- \mathbf{p}$, а все регулярные решения определяются условиями

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} \oplus \mathbf{A}_{sk}^- \mathbf{A}) \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} > 0, \quad k = \arg \max_j q_j^{-1} \mathbf{a}_j^- \mathbf{p}, \quad s = \arg \max_i a_{ik}^{-1} p_i.$$

Доказательство. Пусть компоненты вектора $\mathbf{g} = (g_i)$ удовлетворяют условиям $g_k = a_{sk}^{-1} p_s$ и $g_i = 0$, если $i \neq k$. Определим компоненты регулярного вектора $\mathbf{h} = (h_i)$ при помощи соотношения $h_i = a_{si}^{-1} p_s$ для всех i .

Заметим, что $\mathbf{a}_k^- \mathbf{p} = a_{sk}^{-1} p_s$. Тогда из условий теоремы 3 следует, что $\alpha \mathbf{g} \leq \mathbf{x} \leq \alpha \mathbf{h}$, где $\alpha > 0$. Применяя лемму 2, получаем представление $\mathbf{x} = (\mathbf{I} \oplus \mathbf{gh}^-) \mathbf{u}$, где $\mathbf{u} > 0$.

Осталось убедиться в том, что произведение векторов \mathbf{gh}^- совпадает с произведением матриц $\mathbf{A}_{sk}^- \mathbf{A}$. \square

5. Решение задачи оценки предпочтений. В п. 2 было показано, что задача аппроксимации матрицы парных сравнений \mathbf{A} согласованной матрицей \mathbf{X} в смысле лог-чебышевской метрики эквивалентна задаче (2). Заменим обычные операции в (2) на операции идемпотентного полуполя $\mathbb{R}_{\max, \times}$, а затем перейдем к векторной форме записи. Получим задачу тропической оптимизации в терминах полуполя $\mathbb{R}_{\max, \times}$

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^- \mathbf{A} \mathbf{x}. \quad (9)$$

Заметим, что ее решением является вектор рейтингов альтернатив.

Представим результат решения задачи (9), найденный на основе применения теоремы 1 в работах [17–20], а затем рассмотрим примеры решения некоторых задач.

Теорема 5. Пусть \mathbf{A} — обратнo симметрическая матрица со спектральным радиусом λ и пусть $\mathbf{A}_\lambda = \lambda^{-1} \mathbf{A}$. Тогда минимум в задаче (9) совпадает с λ , а все регулярные векторы, на которых он достигается, вычисляются по формуле

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}_\lambda^* \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} > 0.$$

Рассмотрим примеры применения этой теоремы.

Пример 1. Определим вектор рейтингов альтернатив по матрице парных сравнений

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим спектральный радиус λ матрицы \mathbf{A} , а затем составим матрицы \mathbf{A}_λ и \mathbf{A}_λ^* . Учитывая, что $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, получим

$$\lambda = \text{tr } \mathbf{A} \oplus \text{tr}^{1/2} (\mathbf{A}^2) = 1, \quad \mathbf{A}_\lambda = \lambda^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}_\lambda^* = \mathbf{I} \oplus \mathbf{A}_\lambda = \mathbf{A}.$$

Столбцы матрицы $\mathbf{A}_\lambda^* = \mathbf{A}$ линейно зависимы, поэтому для определения вектора \mathbf{x} рейтингов альтернатив достаточно выбрать один из столбцов и положить

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad u > 0.$$

Пример 2. Решим задачу для случая матрицы парных сравнений порядка 3

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a^{-1} & 1 & c \\ b^{-1} & c^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы применить теорему 5, сначала вычислим спектральный радиус λ . Для этого найдем степени матрицы \mathbf{A} в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= \begin{pmatrix} 1 & a \oplus bc^{-1} & b \oplus ac \\ a^{-1} \oplus b^{-1}c & 1 & a^{-1}b \oplus c \\ b^{-1} \oplus a^{-1}c^{-1} & ab^{-1} \oplus c^{-1} & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}^3 &= \begin{pmatrix} a^{-1}bc^{-1} \oplus ab^{-1}c & a \oplus bc^{-1} & b \oplus ac \\ a^{-1} \oplus b^{-1}c & a^{-1}bc^{-1} \oplus ab^{-1}c & a^{-1}b \oplus c \\ b^{-1} \oplus a^{-1}c^{-1} & ab^{-1} \oplus c^{-1} & a^{-1}bc^{-1} \oplus ab^{-1}c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $a^{-1}bc^{-1} \oplus ab^{-1}c \geq 1$, в результате имеем

$$\lambda = \text{tr } \mathbf{A} \oplus \text{tr}^{1/2}(\mathbf{A}^2) \oplus \text{tr}^{1/3}(\mathbf{A}^3) = (a^{-1}bc^{-1} \oplus ab^{-1}c)^{1/3} \geq 1.$$

Теперь требуется определить матрицы

$$\mathbf{A}_\lambda = \lambda^{-1}\mathbf{A}, \quad \mathbf{A}_\lambda^* = \mathbf{I} \oplus \lambda^{-1}\mathbf{A} \oplus \lambda^{-2}\mathbf{A}^2.$$

После выполнения необходимых вычислений получим

$$\mathbf{A}_\lambda^* = \begin{pmatrix} 1 & a\lambda^{-1}(1 \oplus a^{-1}bc^{-1}\lambda^{-1}) & b\lambda^{-1}(1 \oplus ab^{-1}c\lambda^{-1}) \\ a^{-1}\lambda^{-1}(1 \oplus ab^{-1}c\lambda^{-1}) & 1 & c\lambda^{-1}(1 \oplus a^{-1}bc^{-1}\lambda^{-1}) \\ b^{-1}\lambda^{-1}(1 \oplus a^{-1}bc^{-1}\lambda^{-1}) & c^{-1}\lambda^{-1}(1 \oplus ab^{-1}c\lambda^{-1}) & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим два случая возможных значений λ . Если $\lambda = (a^{-1}bc^{-1})^{1/3}$, то выполняются соотношения $a^{-1}bc^{-1}\lambda^{-1} = \lambda^2 \geq 1$ и $ab^{-1}c\lambda^{-1} = \lambda^{-4} \leq 1$. Здесь матрица \mathbf{A}_λ^* принимает вид

$$\mathbf{A}_\lambda^* = \begin{pmatrix} 1 & bc^{-1}\lambda^{-2} & b\lambda^{-1} \\ a^{-1}\lambda^{-1} & 1 & a^{-1}b\lambda^{-2} \\ a^{-1}c^{-1}\lambda^{-2} & c^{-1}\lambda^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что все столбцы матрицы коллинеарны. Например, умножение первого столбца на $a\lambda$ дает второй столбец, а умножение второго столбца на $c\lambda$ — третий. Тогда в качестве решения достаточно взять только один столбец, например первый. После подстановки $\lambda = (a^{-1}bc^{-1})^{1/3}$ и умножения этого столбца на $(ab)^{1/3}$ имеем

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} (ab)^{1/3} \\ (a^{-1}c)^{1/3} \\ (b^{-1}c^{-1})^{1/3} \end{pmatrix} u, \quad u > 0.$$

Нетрудно проверить, что при условии $\lambda = (ab^{-1}c)^{1/3}$ у решения такой же вид.

Из приведенных примеров видно, что для матриц парных сравнений порядка 2 и 3 вектор рейтингов альтернатив находится единственным (с точностью до умножения на положительную константу) образом. Покажем, что для матриц более высокого порядка это не всегда так.

Пример 3. Пусть имеется матрица парных сравнений порядка 4, заданная в виде

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/4 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы вычислить спектральный радиус λ , найдем для матрицы \mathbf{A} степени

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 & 8 \\ 1/2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 2 \\ 3/2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 8 & 24 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 8 & 2 \\ 3/2 & 8 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^4 = \begin{pmatrix} 12 & 24 & 32 & 8 \\ 4 & 12 & 4 & 4 \\ 3 & 16 & 12 & 16 \\ 8 & 24 & 6 & 12 \end{pmatrix},$$

а также их следы

$$\text{tr } \mathbf{A} = 1, \quad \text{tr } \mathbf{A}^2 = 1, \quad \text{tr } \mathbf{A}^3 = 8, \quad \text{tr } \mathbf{A}^4 = 12.$$

Вычисление спектрального радиуса дает величину $\lambda = 2$.

Теперь рассчитаем матрицы $\mathbf{A}_\lambda = \lambda^{-1}\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}_\lambda^* = \mathbf{I} \oplus \mathbf{A}_\lambda \oplus \mathbf{A}_\lambda^2 \oplus \mathbf{A}_\lambda^3$. После выполнения необходимых вычислений имеем

$$\mathbf{A}_\lambda = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 1/6 \\ 1/8 & 1 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 3/2 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_\lambda^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1/4 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & 3/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Первый и два последних столбца матрицы \mathbf{A}_λ^* коллинеарны, поэтому достаточно взять только один из них. Выбирая первый столбец вместе со вторым, умноженным на коэффициент $1/3$, получим решение

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/4 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} > \mathbf{0}. \quad (10)$$

Заметим, что вне зависимости от выбранного вектора \mathbf{u} , все векторы \mathbf{x} присваивают самый высокий рейтинг первой альтернативе, а самый низкий — второй.

Чтобы получить более определенный результат, можно провести анализ решений, который будет рассмотрен в п. 6.

6. Анализ решений. Сформулируем в терминах тропической математики задачи минимизации (4) и максимизации (5) для нахождения решений, которые минимально и максимально дифференцируют альтернативы с наибольшим и наименьшим рейтингами.

Пусть по матрице парных сравнений \mathbf{A} определено множество векторов рейтингов альтернатив в виде $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{u}$, $\mathbf{u} > \mathbf{0}$, где \mathbf{B} — матрица, полученная из \mathbf{A}_λ^* вычеркиванием столбцов, линейно зависящих от остальных.

Запишем максимальное отношение (3) между компонентами вектора $\mathbf{x} = (x_i)$ в терминах полуполя $\mathbb{R}_{\max, \times}$. С учетом представления $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{u}$ будем иметь

$$\bigoplus_{i=1}^n x_i \bigoplus_{j=1}^n x_j^{-1} = \mathbf{1}^T \mathbf{x} \mathbf{x}^{-1} = \mathbf{1}^T \mathbf{B}\mathbf{u}(\mathbf{B}\mathbf{u})^{-1}.$$

Теперь задачи (4) и (5) определения наихудшего и наилучшего дифференцирующих решений принимают вид задач тропической оптимизации

$$\min_{\mathbf{u}} \quad \mathbf{1}^T \mathbf{B}\mathbf{u}(\mathbf{B}\mathbf{u})^{-1}, \quad (11)$$

$$\max_{\mathbf{u}} \quad \mathbf{1}^T \mathbf{B}\mathbf{u}(\mathbf{B}\mathbf{u})^{-1}. \quad (12)$$

После нахождения решений \mathbf{u} этих задач соответствующие векторы рейтингов альтернатив восстанавливаются по формуле $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{u}$.

6.1. Наихудшее дифференцирующее решение. Для нахождения решения задачи (11), которое позволяет построить вектор с наименьшим разбросом рейтингов альтернатив, применим теорему 2. Сначала сформулируем в терминах рассматриваемой задачи результат леммы 1, в которой положим $\mathbf{q}^- = \mathbf{1}^T \mathbf{B}$, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ и $\mathbf{p} = \mathbf{1}$.

Лемма 3. Пусть $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_j)$ — матрица для задачи (11) со столбцами $\mathbf{b}_j = (b_{ij})$ и $\Delta = (\mathbf{B}(\mathbf{1}^T \mathbf{B})^-)^{-1}$. Определим разреженную матрицу $\hat{\mathbf{B}} = (\hat{b}_{ij})$ с элементами

$$\hat{b}_{ij} = \begin{cases} b_{ij}, & \text{если } b_{ij} \geq \Delta^{-1} \mathbf{1}^T \mathbf{b}_j; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда замена матрицы \mathbf{B} на $\hat{\mathbf{B}}$ в условии задачи (11) не изменит как множество ее решений, так и минимум, который на нем достигается.

Иначе говоря, для нахождения разреженной матрицы строится пороговая матрица $\hat{\mathbf{B}} = \Delta^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \mathbf{B}$. Затем те элементы матрицы \mathbf{B} , которые оказываются меньше соответствующих элементов матрицы $\hat{\mathbf{B}}$, заменяются нулем, а остальные сохраняются.

Чтобы использовать теорему 2, снова положим $\mathbf{q}^- = \mathbf{1}^T \mathbf{B}$, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ и $\mathbf{p} = \mathbf{1}$. Учитывая, что вектор рейтингов альтернатив связан с решением задачи (11) по формуле $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{u}$, приходим к следующему результату.

Лемма 4 (О наихудшем дифференцирующем решении). Пусть \mathbf{B} — разреженная матрица для задачи (11), \mathcal{B} — множество матриц, полученных из \mathbf{B} фиксации одного ненулевого элемента в каждой строке с обращением всех остальных элементов в 0.

Тогда минимум в задаче (11) равен $\Delta = (\mathbf{B}(\mathbf{1}^T \mathbf{B})^-)^{-1}$, а наихудший дифференцирующий вектор имеет вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}(\mathbf{I} \oplus \Delta^{-1} \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \mathbf{B})\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{B}_1 \in \mathcal{B}.$$

Приведем пример использования полученных результатов.

Пример 4. Из числа решений (10) примера 3 выберем вектор, который минимально дифференцирует альтернативы с наибольшим и наименьшим рейтингами.

Для определения минимума целевой функции в (11) последовательно находим

$$\mathbf{1}^T \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{1}^T \mathbf{B})^- = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \Delta = (\mathbf{B}(\mathbf{1}^T \mathbf{B})^-)^{-1} = 3.$$

Для матрицы \mathbf{B} построим пороговую и разреженную матрицы

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Множество \mathcal{B} матриц, полученных из $\hat{\mathbf{B}}$ фиксацией одного ненулевого элемента в каждой строке, включает матрицы

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу \mathbf{B}_1 . Применим результат леммы 4, чтобы построить вектор рейтингов альтернатив, который соответствует этой матрице. Сначала найдем

$$\mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} \oplus \Delta^{-1} \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно вычислить матрицу

$$\mathbf{B}(\mathbf{I} \oplus \Delta^{-1} \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \hat{\mathbf{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что столбцы этой матрицы совпадают. Следовательно, для представления вектора решения достаточно взять только один из них.

Вычисления с остальными матрицами $\mathbf{B}_i \in \mathcal{B}$ приводят к такому же результату и поэтому опущены.

Таким образом, для рассматриваемой задачи получен вектор рейтингов, который минимально дифференцирует альтернативы:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} v, \quad v > 0.$$

6.2. Наилучшее дифференцирующее решение. Для решения задачи (12), которая обеспечивает наилучшее дифференцирующее решение, будем использовать теорему 3 при условии, что $\mathbf{q}^- = \mathbf{1}^T \mathbf{B}$, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ и $\mathbf{p} = \mathbf{1}$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 5 (О наилучшем дифференцирующем решении). Пусть $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_j)$ — матрица со столбцами $\mathbf{b}_j = (b_{ij})$. Обозначим через \mathbf{B}_{sk} матрицу, полученную из \mathbf{B} обращением в нуль всех элементов, кроме элемента b_{sk} .

Тогда максимум в задаче (12) равен $\Delta = \mathbf{1}^T \mathbf{B} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{1}$, а наилучший дифференцирующий вектор имеет вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}(\mathbf{I} \oplus \mathbf{B}_{sk}^{-1} \mathbf{B}) \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} > \mathbf{0}, \quad k = \arg \max_j \mathbf{1}^T \mathbf{b}_j \mathbf{b}_j^{-1} \mathbf{1}, \quad s = \arg \max_i b_{ik}^{-1}.$$

Рассмотрим пример, который демонстрирует применение леммы.

Пример 5. Найдем среди решений, полученных в примере 3, вектор, который максимально дифференцирует альтернативы с наибольшим и наименьшим рейтингами.

Чтобы определить индекс k , сначала вычислим

$$\mathbf{1}^T \mathbf{b}_1 = 1, \quad \mathbf{1}^T \mathbf{b}_2 = 1, \quad \mathbf{b}_1^{-1} \mathbf{1} = 4, \quad \mathbf{b}_2^{-1} \mathbf{1} = 3, \quad \mathbf{1}^T \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1^{-1} \mathbf{1} = 4, \quad \mathbf{1}^T \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_2^{-1} \mathbf{1} = 3,$$

откуда следует, что необходимо положить $k = 1$.

Кроме того, учитывая, что

$$b_{11}^{-1} = 1, \quad b_{21}^{-1} = 4, \quad b_{31}^{-1} = 2, \quad b_{41}^{-1} = 2,$$

выберем индекс $s = 2$.

Теперь построим матрицы

$$\mathbf{B}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} \oplus \mathbf{B}_{21}^{-1} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{I} \oplus \mathbf{B}_{21}^{-1} \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 4/3 \\ 1/4 & 1/3 \\ 1/2 & 2/3 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

В силу того, что столбцы последней матрицы коллинеарны, достаточно взять только один из них, например первый. Вектор, который максимально дифференцирует альтернативы с наибольшим и наименьшим рейтингами, имеет вид

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/4 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} v, \quad v > 0.$$

7. Заключение. В работе исследована проблема нахождения вектора рейтингов альтернатив по матрице парных сравнений и получено ее решение, которое основано на применении методов тропической математики. Рассмотрена задача анализа решений в случае, когда вектор рейтингов альтернатив не может быть однозначно определен, и предложен подход к ее решению. Результаты иллюстрированы численными примерами.

Предложенный в статье подход открывает дополнительные возможности прикладного использования тропической математики, в частности, в маркетинговых и социологических исследованиях. Противоречивость суждений респондентов, реальное многообразие их представлений о предмете исследования, ошибки в работе с первичными данными приводят к отсутствию транзитивности оценок. В этих условиях приблизительный характер математической модели, основанной на свойстве транзитивности оценок, делают вполне оправданным неединственность получаемого решения. Стремление найти единственное решение можно рассматривать как объяснимое желание практиков, однако в ситуации использования приблизительной модели

множественность решений — более естественный результат, с которым необходимо считаться.

В рамках такого подхода практики получают возможность дальнейшей работы как по уточнению полученных результатов, так и по их интерпретации. Уточнение результатов может осуществляться на основании дополнительной информации помимо той, которая не нашла отражение в матрице парных сравнений, включая как сведения из других работ, так и данные, собранные в ходе подготовки рассматриваемого исследования. Например, действительная возможность предпочтения одной из альтернатив по отношению к другой при выборе продукта покупателем может являться уже известной на основе накопленного опыта изучения рынка. Это позволяет сузить область поиска решений, а возможно, и выбрать одно из имеющихся. Дополнительные удобства с практической точки зрения может представлять сокращение всего множества решений до двух, одно из которых минимально дифференцирует альтернативы с самым большим и самым маленьким рейтингами, а другое — максимально. Во многих случаях это приводит к возможности записать рейтинги отдельных альтернатив в виде диапазона значений, работа с которыми может быть продолжена.

Интерпретация каждого из решений (включая выявленные границы диапазонов решений) может иметь собственную ценность для практиков, так как каждое из решений в равной степени отражает реальность восприятия респондентами предмета оценки. При одной комбинации гипотетических и реальных дополнительных условий выбора респондент имеет одну иерархию приоритетов, а при других — другую. То, что могло бы проявиться при проведении нескольких опросов различными методами и в разных условиях, находит свое проявление во множестве решений одного исследования.

Для численного нахождения решений, включая вычисление пограничных значений дифференцирующих векторов, предложены простые расчетные формулы. Простота разработанного вычислительного аппарата представляется еще одним важным достоинством полученных результатов для практики.

Литература

1. Гладких И. В., Светланова Ж. В. Измерение значимости характеристик товара в маркетинговых исследованиях // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 8. Менеджмент. 2006. Вып. 2. С. 65–87.
2. Thurstone L. L. A law of comparative judgment // Psychological Review. 1927. Vol. 34, N 4. P. 273–286. DOI:10.1037/h0070288
3. Дэвид Г. Метод парных сравнений / пер. с англ. Н. Космарской, Д. Шмерлинга; под ред. Ю. Адлера. М.: Статистика, 1978. 144 с. (David H. A. The method of paired comparisons.)
4. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий / пер. с англ. Р. Г. Вачнадзе. М.: Радио и связь, 1993. 315 с. (Saaty T. L. The analytic hierarchy process: planning, priority setting, resource allocation.)
5. Ногин В. Д. Упрощенный вариант метода анализа иерархий на основе нелинейной свертки критериев // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 2004. Т. 44, № 7. С. 1261–1270.
6. Saaty T. L., Vargas L. G. Comparison of eigenvalue, logarithmic least squares and least squares methods in estimating ratios // Math. Modelling. 1984. Vol. 5, N 5. P. 309–324. DOI:10.1016/0270-0255(84)90008-3
7. Barzilai J. Deriving weights from pairwise comparison matrices // J. Oper. Res. Soc. 1997. Vol. 48, N 12. P. 1226–1232. DOI:10.1057/palgrave.jors.2600474
8. Chu M. T. On the optimal consistent approximation to pairwise comparison matrices // Linear Algebra Appl. 1998. Vol. 272, N 1–3. P. 155–168. DOI:10.1016/S0024-3795(97)00329-7
9. Parkas A., Lancaster P., Rózsza P. Consistency adjustments for pairwise comparison matrices // Numer. Linear Algebra Appl. 2003. Vol. 10, N 8. P. 689–700. DOI:10.1002/nla.318
10. Elsner L., van den Driessche P. Max-algebra and pairwise comparison matrices. II // Linear Algebra Appl. 2010. Vol. 432, N 4. P. 927–935. DOI:10.1016/j.laa.2009.10.005

11. Tran N. M. Pairwise ranking: Choice of method can produce arbitrarily different rank order // *Linear Algebra Appl.* 2013. Vol. 438, N 3. P. 1012–1024. DOI:10.1016/j.laa.2012.08.028
12. Gursoy B. B., Mason O., Sergeev S. The analytic hierarchy process, max algebra and multi-objective optimisation // *Linear Algebra Appl.* 2013. Vol. 438, N 7. P. 2911–2928. DOI:10.1016/j.laa.2012.11.020
13. Маслов В. П., Колокольцов В. Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Физматлит, 1994. 144 с.
14. Golan J. S. Semirings and affine equations over them. New York: Springer, 2003. 256 p. (Vol. 556 of *Mathematics and Its Applications.*)
15. Heidergott B., Olsder G. J., van der Woude J. Max plus at work. Princeton: Princeton University Press, 2006. 226 p. (Princeton Series in Applied Mathematics.)
16. Кривулин Н. К. Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. 256 с.
17. Кривулин Н. К., Гладких И. В. Методы построения матрицы результатов парных сравнений на основе тропической математики // *Модели и методы тропической математики в прикладных задачах экономики и управления: сб. науч. статей / под ред. Н. К. Кривулина.* СПб.: ВВМ, 2013. С. 4–32.
18. Кривулин Н. К., Гладких И. В. Построение согласованной матрицы парных сравнений в маркетинговых исследованиях на основе методов тропической математики // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 8. Менеджмент.* 2015. Вып. 1. С. 3–43.
19. Krivulin N. Rating alternatives from pairwise comparisons by solving tropical optimization problems // 12th Intern. Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery (FSKD) / eds: Z. Tang, J. Du, S. Yin, L. He, R. Li. IEEE, 2015. P. 162–167. DOI:10.1109/FSKD.2015.7381933
20. Krivulin N. Using tropical optimization techniques to evaluate alternatives via pairwise comparisons // *Proc. 7th SIAM Workshop on Combinatorial Scientific Computing* / eds: A. H. Gebremedhin, E. G. Boman, B. Ucar. Philadelphia: SIAM, 2016. P. 62–72. DOI:10.1137/1.9781611974690.ch7
21. Krivulin N. Extremal properties of tropical eigenvalues and solutions to tropical optimization problems // *Linear Algebra Appl.* 2015. Vol. 468. P. 211–232. DOI:10.1016/j.laa.2014.06.044
22. Krivulin N. Solving a tropical optimization problem via matrix sparsification // *Relational and Algebraic Methods in Computer Science.* Vol. 9348 of *Lecture Notes in Comput. Sci.* / eds: W. Kahl, M. Winter, J. N. Oliveira. Cham: Springer, 2015. P. 326–343. DOI:10.1007/978-3-319-24704-5_20
23. Krivulin N. A maximization problem in tropical mathematics: A complete solution and application examples // *Informatica.* 2016. Vol. 27, N 3. P. 587–606. DOI:10.15388/Informatica.2016.101

Для цитирования: Кривулин Н. К., Агеев В. А., Гладких И. В. Применение методов тропической оптимизации для оценки альтернатив на основе парных сравнений // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления.* 2017. Т. 13. Вып. 1. С. 27–41. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2017.103

References

1. Gladkikh I. V., Svetlanova Zh. V. Izmerenie znachimosti kharakteristik tovara v marketingovykh issledovaniyakh [The measurement of product characteristics importance in marketing research]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 8. Management*, 2006, issue 2, pp. 65–87. (In Russian)
2. Thurstone L. L. A law of comparative judgment. *Psychological Review*, 1927, vol. 34, no. 4, pp. 273–286. DOI:10.1037/h0070288
3. David H. A. *The method of paired comparisons*. London, Griffin, 1963, 124 p. (Vol. 12 of Griffin's *Statistical Monographs and Courses.*) (Russ. ed.: David G. *Metod parnykh sravnenij*. Moscow, Statistika Publ., 1978, 144 p.)
4. Saaty T. L. *The analytic hierarchy process: planning, priority setting, resource allocation*. New York, McGraw-Hill, 1980, 281 p. (Russ. ed.: Saaty T. *Prinyatie reshenij. Metod analiza ierarkhij*. Moscow, Radio i svyaz', 1993, 315 p.)
5. Nogin V. D. Uproshchennyj variant metoda analiza ierarkhij na osnove nelinejnoj svertki kriteriev [A simplified variant of a method for the analysis of hierarchies, based on a nonlinear convolution of criteria]. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki* [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2004, vol. 44, no. 7, pp. 1261–1270. (In Russian)
6. Saaty T. L., Vargas L. G. Comparison of eigenvalue, logarithmic least squares and least squares methods in estimating ratios. *Math. Modelling*, 1984, vol. 5, no. 5, pp. 309–324. DOI:10.1016/0270-0255(84)90008-3
7. Barzilai J. Deriving weights from pairwise comparison matrices. *J. Oper. Res. Soc.*, 1997, vol. 48, no. 12, pp. 1226–1232. DOI:10.1057/palgrave.jors.2600474

8. Chu M. T. On the optimal consistent approximation to pairwise comparison matrices. *Linear Algebra Appl.*, 1998, vol. 272, no. 1–3, pp. 155–168. DOI:10.1016/S0024-3795(97)00329-7
9. Farkas A., Lancaster P., Rózsza P. Consistency adjustments for pairwise comparison matrices. *Numer. Linear Algebra Appl.*, 2003, vol. 10, no. 8, pp. 689–700. DOI:10.1002/nla.318
10. Elsner L., van den Driessche P. Max-algebra and pairwise comparison matrices. II. *Linear Algebra Appl.*, 2010, vol. 432, no. 4, pp. 927–935. DOI:10.1016/j.laa.2009.10.005
11. Tran N. M. Pairwise ranking: Choice of method can produce arbitrarily different rank order. *Linear Algebra Appl.*, 2013, vol. 438, no. 3, pp. 1012–1024. DOI:10.1016/j.laa.2012.08.028
12. Gursoy B. B., Mason O., Sergeev S. The analytic hierarchy process, max algebra and multi-objective optimisation. *Linear Algebra Appl.*, 2013, vol. 438, no. 7, pp. 2911–2928. DOI:10.1016/j.laa.2012.11.020
13. Maslov V. P., Kolokol'tsov V. N. *Idempotentnyj analiz i ego primeneniye v optimal'nom upravlenii* [Idempotent analysis and its applications in optimal control]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1994, 144 p. (In Russian)
14. Golan J. S. *Semirings and affine equations over them*. New York, Springer, 2003, 256 p. (Vol. 556 of Mathematics and Its Applications.)
15. Heidergott B., Olsder G. J., van der Woude J. *Max plus at work*. Princeton, Princeton University Press, 2006, 226 p. (Princeton Series in Applied Mathematics.)
16. Krivulin N. K. *Metody idempotentnoj algebrы v zadachakh modelirovaniya i analiza slozhnykh sistem* [Methods of idempotent algebra for problems in modeling and analysis of complex systems]. Saint Petersburg, Saint Petersburg University Publ., 2009, 256 p. (In Russian)
17. Krivulin N. K., Gladkikh I. V. Metody postroeniya matritsy rezul'tatov parnykh sravnenij na osnove tropicheskoy matematiki [Tropical mathematics-based methods for constructing a consistent matrix of pairwise comparisons]. *Modeli i metody tropicheskoy matematiki v prikladnykh zadachakh ehkonomiki i upravleniya* [Models and methods of tropical mathematics with applications to problems in economics and management]. Saint Petersburg, VVM Publ., 2013, pp. 4–32. (In Russian)
18. Krivulin N. K., Gladkikh I. V. Postroenie soglasovannoy matritsy parnykh sravnenij v marketingovykh issledovaniyakh na osnove metodov tropicheskoy matematiki [Computation of the consistent pairwise comparison matrix in marketing research by using methods of tropical mathematics]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 8. Management*, 2015, issue 1, pp. 3–43. (In Russian)
19. Krivulin N. Rating alternatives from pairwise comparisons by solving tropical optimization problems. *12th Intern. Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery (FSKD)*. Eds Z. Tang, J. Du, S. Yin, L. He, R. Li. IEEE, 2015, pp. 162–167. DOI:10.1109/FSKD.2015.7381933
20. Krivulin N. Using tropical optimization techniques to evaluate alternatives via pairwise comparisons. *Proc. 7th SIAM Workshop on Combinatorial Scientific Computing*. Eds A. H. Gebremedhin, E. G. Boman, B. Ucar. Philadelphia, SIAM, 2016, pp. 62–72. DOI:10.1137/1.9781611974690.ch7
21. Krivulin N. Extremal properties of tropical eigenvalues and solutions to tropical optimization problems. *Linear Algebra Appl.*, 2015, vol. 468, pp. 211–232. DOI:10.1016/j.laa.2014.06.044
22. Krivulin N. Solving a tropical optimization problem via matrix sparsification. *Relational and Algebraic Methods in Computer Science*. Vol. 9348 of Lecture Notes in Comput. Sci. Eds W. Kahl, M. Winter, J. N. Oliveira. Cham, Springer, 2015, pp. 326–343. DOI:10.1007/978-3-319-24704-5_20
23. Krivulin N. A maximization problem in tropical mathematics: A complete solution and application examples. *Informatica*, 2016, vol. 27, no. 3, pp. 587–606. DOI:10.15388/Informatica.2016.101

For citation: Krivulin N. K., Ageev V. A., Gladkikh I. V. Application of methods of tropical optimization for evaluating alternatives based on pairwise comparisons. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied mathematics. Computer science. Control processes*, 2017, volume 13, issue 1, pp. 27–41. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2017.103

Статья рекомендована к печати проф. Л. А. Петросяном.

Статья поступила в редакцию 7 декабря 2016 г.

Статья принята к печати 19 января 2017 г.